ESCUELA MILITAR DE INGENIERIA
ECUACIONES DIFERENCIALES
Misceláneas de problemas
2013

Tema: Modelos Matemáticos.

Crecimiento y decrecimiento.

1. SE sabe que la población de una comunidad crece con una razón proporcional al número de personas presentes en el tiempo t. Si la población inicial P_0 se duplicó en 5 años, ¿En cuánto tiempo se triplicará y cuadriplicará?

2. Suponga que se sabe que la población de la comunidad del problema 1 es de 10000 después de tres años. ¿Cuál era la población inicial P_0? ¿Cuál será la población en 10 años? ¿Qué tan rápido está creciendo la población en $t = 10$?

3. La población de un pueblo crece con una razón proporcional a la población en el tiempo t. La población inicial de 500 aumenta 15 % en 10 años. ¿Cuál será la población pasados 30 años? ¿Qué tan rápido está creciendo la población en $t = 30$?

4. La población de bacterias en un cultivo crece a una razón proporcional a la cantidad de bacterias presentes al tiempo t. Después de 10 horas hay 2000 bacterias presentes. Después de 10 horas hay 2000 bacterias presentes. ¿Cuál era la cantidad inicial de bacterias?

5. El isótopo radiactivo del plomo Pb-209, decae con una razón proporcional a la cantidad presente al tiempo t y tiene una vida media de 3.3 horas Si al principio había 1 gramo de plomo, ¿cuánto tiempo debe transcurrir para que decaiga 90

6. Inicialmente había 100 miligramos de una sustancia radiactiva. Después de 6 horas la masa disminuyo 3 %. Si la razón de decaimiento, en momento, es proporcional a la cantidad de la sustancia presente al tiempo t, determine la cantidad que queda después de 24 horas.

7. Calcule la vida media de la sustancia radiactiva del problema 6.

8. *a*) El problema con valores iniciales $\frac{dA}{dt} = kA, A(0) = A_0$ es el modelo de decaimiento de una sustancia radiactiva. Demuestre que , en general, la vida media T de la sustancia es $T = -\frac{\ln 2}{k}$.

   b) Demuestre que la solución del problema con valores iniciales del inciso a), se puede escribir como $A(t) = A_0 2^{-\frac{t}{T}}$

   c) Si una sustania radiactiva tiene la vida media T dada en el inciso a), ¿cuánto tiempo le tomará a una cantidad inicial A_0 de sustancia decaer a $\frac{1}{8}A_0$?

9. Cuando para un rayo vertical de luz por un medio transparente, la razón con que decrece su intensidad I es proporcional a $I(t)$, donde t representa el espesor, en pies, del medio. En agua limpia de mar, la intensidad a 3 pies debajo de la superficie es 25 % de la intensidad inicial I_0 del rayo incidente. ¿Cuál es la intensidad del rayo a 15 pies debajo de la superficie?

Ley de Newton enfriamiento/calentamiento.

1. Un termómetro se cambia de una habitación donde la temperatura es de 70^0F al exterior, donde la temperatura del aire es de 10^0F. Después de medio minuto el termómetro indica 50^0F. ¿Cuál es la lectura del termómetro en $t = 1$ min.? ¿Cuánto tiempo le tomará al termómetro alcanzar los 15^0F?

2. Un termómetro se lleva de una habitación hasta el ambiente exterior, donde la temperatura del aire es 5^0F. Después de 1 minuto, el termómetro indica 55^0F y después de 5 minutos indica 30^0F. ¿Cuál era la temperatura inicial de la habitación?

3. Una pequeña barra de metal, cuya temperatura inicial era de 20^0C, se deja caer en un gran tanque de agua hirviendo. ¿Cuánto tiempo tardará la barra en alcanzar los 90^0C si se sabe que su temperatura aumentó 2^0C en 1 segundo? ¿Cuánto tiempo tardará en alcanzar los 98^0C?

4. Dos grandes tanques A y B del mismo tamaño se llenan con fluidos diferentes. Los fluidos en los tanques A y B se mantienen a 0^0C y a 100^0C, respectivamente. Una pequeña barra de metal, cuya temperatura inicial es 100^0C, se sumerge dentro del tanque A. Después de 1 minuto la temperatura de la barra es de 90^0C. Después de 2 minutos se saca la barra e inmediatamente se transfiere al otro tanque. Después de 1 minuto en el tanque B la temperatura se eleva 10^0C. ¿Cuánto tiempo, medido desde el comienzo de todo el proceso, le tomará a la barra alcanzar los $99{,}9^0C$?

5. Un termómetro que indica 70^0F se coloca en un horno precalentado a una temperatura constante. A través de una ventana de vidrio en la puerta del horno, un observador registra que el termómetro lee 110^0F después de 0.5 minuto y 145^0F después de 1 minuto. ¿Cuál es la temperatura del horno?

6. Un cadáver se encontró dentro de un cuarto cerrado en una casa donde la temperatura era constante a 70^0F. Al tiempo del descubrimiento la temperatura del corazón del cadáver se determinó de 85^0F. Una hora después una segunda medición mostró que la temperatura del corazón era de 80^0F. Suponga que el tiempo de la muerte corresponde a $t = 0$ y que la temperatura del corazón en ese momento era de $98{,}6^0F$. Determine ¿cuántas horas pasaron antes de que se encontrara el cadáver?

   Sugerencia: Sea que $t_1 > 0$ denote el tiempo en que se encontró el cadáver.

7. La razón con la que un cuerpo se enfría también depende de su área superficial expuesta S. Si S es una constante entonces una modificación de la ecuación de enfriamiento/calentamiento de Newton es:

$$\frac{dT}{dt} = kS(T - T_m)$$

   donde $k < 0$ y T_m es una constante. Suponga que dos tazas A y B están llenas de café al mismo tiempo. Inicialmente la temperatura del café es de 150^0F. El área superficial del café en la taza B es del doble del área superficial del café en la taza A. Después de 30 minutos la temperatura del café en la taza A es de 100^0F. Si $T_m = 70^0F$, entonces ¿cuál es la temperatura del café de la taza B después de 30 minutos?