ESCUELA MILITAR DE INGENIERÍA

MISCELÁNEAS DE PROBLEMAS

CÁLCULO II

VECTORES.

1. Sean $A = (1, -2), B = (-1, 3)$ y $C = (0, 4)$; hallar:
   a) $A + B$
   b) $A - B + C$
   c) $4A - 3B$
   d) $4(A + B) - 5C$
   e) $\frac{1}{2}(A - B) + \frac{1}{4}C$
2. Sean $A = (1, 4, -1), B = (2, 5, 4)$ y $C = (0, 4, 0)$; hallar:
   a) $A + C$
   b) $2A - B + 2C$
   c) $-\frac{1}{2}B + A - C$
   d) $3A - B$
   e) $\frac{1}{2}(A + B) - B$
3. Si $A = (1, 2), B = (-1, 3)$ realizar gráficamente las siguientes operaciones:
   a) $A + B$
   b) $A - B$
   c) $2A - 3B$
   d) $\frac{1}{2}A - \frac{5}{2}b$
4. Dados los vectores A y B, en cada una de las ecuaciones, determinar un vector X que la satisfaga:
   a) $A = (2, 3), B = (1, -4); \quad 3X - 2A + B = 0$
   b) $A = (0, -1), B = (5, 2); \quad 3(A - X) = 6(X - A + B) - 3X$
   c) $A = (1, 2, -1), B = (0, 3, 1); \quad X - 3A - B = 2X$
   d) $A = (1, 3, 2), B = (-2, 1 - 2); \quad 2(A - X) = X - 2B - 2(X - A)$
5. Si $\overrightarrow{u} = (3, 0, 4)$ y $\overrightarrow{v} = (2, -1, -3)$, calcular la longitud o módulo de:
   a) $\overrightarrow{u}$
   b) $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}$

c) $3\overrightarrow{u} - \frac{1}{2}\overrightarrow{v}$

d) $\frac{\overrightarrow{u}}{\|\overrightarrow{u}\|} + \frac{\overrightarrow{v}}{\|\overrightarrow{v}\|}$

6. Hallar un vector $\overrightarrow{u}$ en la dirección de $\overrightarrow{v} = (-1, 1, -1)$ cuya longitud sea la mitad del vector $\overrightarrow{v}$

7. Calcular la distancia entre los siguientes pares de puntos:

   a) $(1, 1), (2, -1)$

   b) $(3, 8), (8, 3)$

   c) $(1, -1, 8), (1, 2, 3)$

PARALELISMO.

1. Indicar cuáles de los siguientes pares de vectores son paralelos y en tal caso, indicar si tienen el mismo sentido.

   a) $(1, 1), (2, 2)$

   b) $(2, 4), (4, 2)$

   c) $(5, 7, 3), (-15, -21, -9)$

2. Si $\overrightarrow{u} = (1, 2, 3)$ y $\overrightarrow{v} = (3, 1, 2)$, hallar un vector unitario $\overrightarrow{w}$ paralelo al vector:

   a) $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}$

   b) $2\overrightarrow{u} - \overrightarrow{v}$

   c) $-\overrightarrow{u} + 3\overrightarrow{v}$

3. Si $\overrightarrow{a} = (4, 2, -4)$, $\overrightarrow{b} = (2, -1, 0)$, $\overrightarrow{c} = (0, 1, -1)$, encontrar un escalar t para que $\overrightarrow{a}$ sea paralelo al vector $\overrightarrow{b} + t\overrightarrow{c}$

PRODUCTO ESCALAR Y ORTOGONALIDAD.

1. Sean $\overrightarrow{u} = (3, 0, 5), \overrightarrow{v} = (2, -1, -3), \overrightarrow{w} = (1, -2, 1), \overrightarrow{z} = (2, 3, -1)$. Hallar:

   a) $\overrightarrow{u} \circ \overrightarrow{v}$

   b) $\overrightarrow{u} \circ (\overrightarrow{w} - \overrightarrow{z})$

   c) $\overrightarrow{v} \circ \overrightarrow{v}$

   d) $(\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}) \circ (\overrightarrow{w} - \overrightarrow{z})$

   e) $(\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}) \circ (\overrightarrow{u} - \overrightarrow{v})$

   f) $\|\overrightarrow{u} - \overrightarrow{v}\|^2$

2. Determinar todos los pares ortogonales entre los vectores $\overrightarrow{a} = (4, 1, -3)$, $\overrightarrow{b} = (1, 2, 2)$, $\overrightarrow{c} = (1, 2, -2)$, $\overrightarrow{d} = (2, 1, 2)$ y $\overrightarrow{e} = (2, -2, -1)$.

3. Hallar todos los vectores de $\mathbb{R}^2$ de la misma longitud de $\overrightarrow{u}$ y que son ortogonales a $\overrightarrow{u}$, siendo:

   a) $\overrightarrow{u} = (1, 2)$
   b) $\overrightarrow{u} = (2, -1)$
   c) $\overrightarrow{u} = (-2, 8)$

4. Encontrar un vector $\overrightarrow{x}$, distinto de cero, que sea ortogonal a $(1, 5, -1)$. Es $\overrightarrow{x}$ único?

5. Demostrar que el vector $\overrightarrow{u} = (1, 2, -3)$ es ortogonal a $\alpha\overrightarrow{v} + \beta\overrightarrow{w}$, donde $\overrightarrow{v} = (2, 2, 2)$, $\overrightarrow{w} = (-1, 2, 1)$, y $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

6. Hallar el valor de k de modo que $\overrightarrow{v} - k\overrightarrow{u}$ sea ortogonal a $\overrightarrow{u}$ si $\overrightarrow{u} = (2, -1, 2)$, $\overrightarrow{v} = (3, 1, 2)$.

7. Demostrar que si $\overrightarrow{u}$ y $\overrightarrow{v}$ son vectores cualesquiera, entonces los vectores

$$\|\overrightarrow{v}\|\overrightarrow{u} + \|\overrightarrow{u}\|\overrightarrow{v} \text{ y } \|\overrightarrow{v}\|\overrightarrow{u} - \|\overrightarrow{u}\|\overrightarrow{v}$$

   son ortogonales.

8. Sean los puntos $A(3, 2, 1), B(1, 4, 1)$ y $C(2, 1, 1)$. Determinar el punto P de modo que se verifique

$$\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OP} + 2 \cdot \overrightarrow{CA} + 3 \cdot \overrightarrow{PB}$$

9. Dados los vértices de un cuadrilátero $A(1, -2, 2), B(1, 4, 0), C(-4, 1, 1)$ y $D(-5, -5, 3)$. Demostrar que sus diagonales AC y BD son perpendiculares entre si.

10. Demostrar vectorialmente que uniendo los puntos medios de dos lados de un triángulo cualquiera, se forma un segmento paralelo al tercer lado con la mitad de su magnitud.

11. Demostrar vectorialmente que las medianas de un triángulo se cortan en un punto (denominado BARICENTRO); el cual las divide en la razón $1 : 2$.

12. Demostrar vectorialmente que todo triángulo inscrito en una semi-circunferencia de radio R; con un lado en el diámetro; es rectángulo.

13. Demostrar vectorialmente que las diagonales de un rombo se cortan en ángulo recto.

14. Mostrar que la recta que une el vértice de un triángulo isósceles con el punto medio de su base es perpendicular a la base.

15. Demostrar que las diagonales de un paralelogramo se bisecan.

16. Calcular la componente de $\overrightarrow{u}$ en la dirección de $\overrightarrow{v}$, siendo:

    a) $\overrightarrow{u} = (3, 8), \overrightarrow{v} = (2, 0)$
    b) $\overrightarrow{u} = (5, -8), \overrightarrow{v} = (1, 1)$
    c) $\overrightarrow{u} = (1, 2, -3), \overrightarrow{v} = (1, 0, 1)$
    d) $\overrightarrow{u} = (1, 1, 1), \overrightarrow{v} = (1, 2, -3)$

17. Mostrar que el ángulo que forma $\overrightarrow{a} = (1,2,1)$ y $\overrightarrow{b} = (2,1,-1)$ es el doble del que forman $\overrightarrow{c} = (1,4,1)$ y $\overrightarrow{d} = (2,5,5)$.

18. Determinar los cosenos de los ángulos del triángulo cuyos vértices son los puntos $(2,-1,1), (1,-3,-5)$ y $(3,-4,-4)$.

19. Hallar dos vectores no paralelos, ortogonales a $(1,2,-1)$

20. Hallar dos vectores perpendiculares entre si y perpendiculares, cada uno, al vector $(2,1,-2)$.

PRODUCTO VECTORIAL. ÁNGULO ENTRE VECTORES.

1. Sean $\overrightarrow{a} = (1,2,-3)$, $\overrightarrow{b} = (1,-2,6)$ y $\overrightarrow{c} = (-1,-2,1)$. Hallar:

   a) $\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}$
   b) $\overrightarrow{b} \times \overrightarrow{a}$
   c) $\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{a}$
   d) $\overrightarrow{a} \times (\overrightarrow{b} \times \overrightarrow{c})$
   e) $\overrightarrow{a} \times (\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b})$
   f) $(\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}) \times (\overrightarrow{a} - \overrightarrow{b})$
   g) $(\overrightarrow{a} - 2\overrightarrow{c}) \times 2\overrightarrow{b}$

2. Sean $\overrightarrow{a} = (1,0,-1)$, $\overrightarrow{b} = (2,-1,1)$ y $\overrightarrow{c} = (1,2,1)$. Hallar;

   a) $\overrightarrow{a} \circ \overrightarrow{b} \times \overrightarrow{c}$
   b) $\overrightarrow{c} \circ \overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}$
   c) $\overrightarrow{a} \circ \overrightarrow{a} \times \overrightarrow{c}$
   d) $\overrightarrow{c} \circ \overrightarrow{a} \times \overrightarrow{c}$

3. Tres vértices de un paralelogramo son los puntos $\overrightarrow{a} = (1,0,1)$, $\overrightarrow{b} = (-1,1,1)$ y $\overrightarrow{c} = (2,-1,2)$. Hallar todos los puntos que pueden ser el cuarto vértice del paralelogramo.

4. Calcular el área del paralelogramo de lados:

   a) $(5,3)$ y $(3,7)$
   b) $(1,-1)$ y $(2,4)$
   c) $(1,3,0)$ y $(-2,-4,3)$
   d) $(-3,2,-4)$ y $(1,1,1)$
   e) $(a,0,0)$ y $(0,b,c)$ donde $a,b,c \in \mathbb{R}$

5. Calcular el área del triángulo de vértices

   a) $(0,0), (1,0)$ y $(3,8)$

b) $(5,0),(8,4)$ y $(1,-1)$

c) $(-2,1,3),(3,0,6)$ y $(4,5,-1)$

d) $(a,0,0),(0,b,0)$ y $(0,0,c)$ donde $a,b,c \in \mathbb{R}$

6. Determinar el volumen del paralelepípedo determinado por:

   a) $(2,2,4),(1,5,2)$ y $(1,0,1)$

   b) $(2,1,3),(-3,0,6)$ y $(4,5,-1)$

7. Determinar el volumen del tetraedro de aristas:

   a) $(5,0,16),(1,-1,1)$ y $(8,2,3)$

   b) $(a,b,0),(0,b,c)$ y $(a,0,c)$ donde $a,b,c \in \mathbb{R}$

8. Demostrar la ley de los cosenos vectorialmente.

9. Calcular el ángulo comprendido entre dos diagonales de un cubo de lado a.

10. Dados los vectores unitarios $\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}$ que verifican la condición $\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b} + \overrightarrow{c} = 0$. Hallar el valor reducido de:

$$\overrightarrow{a} \circ \overrightarrow{b} + \overrightarrow{a} \circ \overrightarrow{c} + \overrightarrow{b} \circ \overrightarrow{c}$$

11. Dados los vértices del paralelogramo $ABCD$: $A(3,-1,2), B(1,2,-4), C(-1,1,2)$. Hallar las coordenadas del cuarto vértice D.

12. Sabiendo que $\|\overrightarrow{a}\| = 3$ y $\|\overrightarrow{b}\| = 5$, determinar los valores de k para que los vectores $\overrightarrow{a} + k\overrightarrow{b}$ y $\overrightarrow{a} - k\overrightarrow{b}$ sean ortogonales.

13. Los vectores $\overrightarrow{a}$ y $\overrightarrow{b}$ forman un ángulo de $\frac{2\pi}{3}$, sabiendo que $\|\overrightarrow{a}\| = 1$ y $\|\overrightarrow{b}\| = 2$. Calcular:

    a) $\|\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}\|^2$

    b) $|(\overrightarrow{a} + 3\overrightarrow{b}) \circ (3\overrightarrow{a} - \overrightarrow{b})|^2$

14. Hallar el volumen del paralelepípedo que tiene tres lados coincidentes con los vectores $\overrightarrow{a} = (1,2,3), \overrightarrow{b} = (1,1,2), \overrightarrow{c} = (2,1,1)$

PROYECCIONES Y VECTORES COMPONENTES.

1. Dados los vértices ABC de un triángulo $A(1,-1,2), B(5,-6,2), C(1,3,-1)$. Calcular la longitud de la altura trazada desde el vértice B.

2. Dados los vectores $\overrightarrow{a} = (-2,1,1), \overrightarrow{b} = (1,5,0), \overrightarrow{c} = (4,4,2)$. Hallar:

   a) $Proy_{\overrightarrow{b}}(3\overrightarrow{a} - \overrightarrow{c})$

   b) $Comp_{\overrightarrow{a}}(2\overrightarrow{b} - \overrightarrow{c})$

c) $Proy_{(\overrightarrow{a}-\overrightarrow{c})}(\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}+\overrightarrow{c})$

3. Para $\overrightarrow{a}=(4,-2,1)$, $\overrightarrow{b}=(2,-1,4)$. Hallar la componente del vector $\overrightarrow{u}=3\overrightarrow{a}-2\overrightarrow{b}$ sobre el vector $\overrightarrow{v}=2\overrightarrow{a}+3\overrightarrow{b}$

4. Para $\overrightarrow{a}=(2,3,1)$, $\overrightarrow{b}=(2,1,-3)$. Calcular la proyección del vector $\overrightarrow{u}=3\overrightarrow{a}-2\overrightarrow{b}$ sobre el vector $\overrightarrow{v}=\overrightarrow{b}-3\overrightarrow{a}$.