ESCUELA MILITAR DE INGENIERIA
ÁLGEBRA I
Misceláneas de problemas
2014

Tema: CONJUNTOS.

Elaborado por: ***Lic. Bismar Choque Nina***

No enseñar a un hombre que está dispuesto a aprender es desaprovechar a un hombre.
Enseñar a quien no está dispuesto a aprender es malgastar las palabras

1. Suponga que en el pueblo en cuestión hay un único profesor de Matemáticas y el alcalde le exige que sólo puede resolver los problemas de Matemáticas de aquellas personas que no saben Matemáticas. El profesor tiene un problema matemático que desea resolver.

   Discuta y formalize el planteamiento del problema, si el profesor tiene solución o no para su dilema.

2. Comente y discuta.

   Argumentum Ornithologicum

   El problema involucra el de la existencia y unicidad de Dios.

   a) Cierro los ojos y veo una bandada de pájaros. La visión dura un segundo o acaso menos; no sé cuantos pájaros vi. ¿Era definido su número? Si Dios existe, el número es definido, por que Dios sabe cuántos pájaros vi. Si Dios no existe, el número es indefinido, por que nadie pudo llevar la cuenta. En tal caso, vi menos de diez pájaros (digamos) y más de uno, pero no vi nueve, ocho, siete, seis, cinco, cuatro, tres o dos pájaros. Vi un número entre diez y uno, que no es nueve, ocho, siete, seis, cinco, etc. Ese número entero es inconcebible.

   b) Supongamos un juego para dos personas que termina en un número finito de movidas, con la ineluctable victoria de uno de los jugadores.

3. Muestre que los conjuntos $\emptyset$, $\{\emptyset\}$, $\{\{\emptyset\}\}$,.......,$\{\cdots\{\emptyset\}\cdots\}$ son distintos.

4. Indique cuáles de las siguientes expresiones son falsas:

   a) $A = \{A\}$

   b) $\{a, b\} = \{\{a\}, \{b\}\}$

   c) $\emptyset \in \{\emptyset\}$

5. Pruebe que:

$$A \subseteq \{A\} \Rightarrow A = \emptyset$$

6. Pruebe que:

$$\bigcup \emptyset = \emptyset.$$

7. Demuestre:

   a) $A^c = \emptyset \Leftrightarrow A = U$

   b) $A^c = U \Leftrightarrow A = \emptyset$

8. Demuestre:

$$X \subseteq Y \Leftrightarrow A \cap [X \cup (B \setminus (A \setminus X))] \subseteq (A \cap Y) \cup [(A \cap B) \setminus (A \setminus Y)]$$

9. Demuestre: $\{a, \{a, b\}\} = \{c, \{c, d\}\} \Rightarrow a = c \wedge b = d$

10. Demuestre que si $A \subseteq B$ entonces $\mathcal{P}(A) \subseteq \mathcal{P}(B)$.

11. Demuestre que:

    a) $\mathcal{P}(A) = \mathcal{P}(B) \Rightarrow A = B$

    b) $\mathcal{P}(X) \neq X$.

12. *a)* Demuestre que si $A \subseteq C$ entonces $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap C$.

    b) ¿Será cierto el resultado anterior si se suprime la hipótesis $A \subseteq C$.

13. Pruebe que:

    a) $A \setminus B = (A \cup B) \setminus B$.

    b) $A \setminus (B \setminus C) = (A \setminus B) \cup (A \cap C)$.

c) $(A \setminus C) \setminus (B \setminus C) = (A \setminus B) \setminus C$.

d) $(A \setminus C) \cup (B \setminus C) = (A \cup B) \setminus C$.

e) $(A \setminus C) \cap (B \setminus C) = (A \cap B) \setminus C$.

f) $(A \setminus B) \setminus (A \setminus C) = A \cap (C \setminus B)$.

g) Si $A, B \subseteq X$, entonces $(X \setminus A) \setminus (X \setminus B) = B \setminus A$.

14. Muestre por medio de ejemplos que las siguientes proposiciones son falsas:

a) $A \setminus B = B \setminus A$.

b) $A \subseteq (B \cup C)$ implica $A \subseteq B$ o $A \subseteq C$.

c) $(B \cap C) \subseteq A$ implica $B \subseteq A$ o $C \subseteq A$.

15. Pruebe que $A \vartriangle B = \emptyset$ si y sólo si $A = B$.

16. Pruebe que:

a) $A \cup B = A \vartriangle B \vartriangle (A \cap B)$.

b) $A \setminus B = A \vartriangle (A \cap B)$.

17. Demuestre que:

$$A \times B = B \times A \text{ si y sólo si } A = B.$$

18. Pruebe que $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$.

19. Demuestre que:

a) $(A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C)$.

b) $A \times (B \setminus C) = (A \times B) \setminus (A \times C)$.

c) $A \times (B \triangle C) = (A \times B) \triangle (A \times C)$.

20. Sea A y B conjuntos arbitrarios. demuestre:

a) $A \triangle B = B \triangle A$

b) $A \triangle (B \triangle C) = (A \triangle B) \triangle C$

c) $A \triangle \emptyset = A$

d) $A \triangle A = \emptyset$

e) $A \triangle B = C \Longleftrightarrow A \triangle C = B$

21. Sea A un conjunto en un conjunto universo U.

    a) Defina adecuadamente $[\mathcal{P}(A)]^c$.

    b) Encuentre una relación (inclusión, igualdad, etc.) entre $\mathcal{P}(A^c)$ y $[\mathcal{P}(A)]^c$

22. Si A y B denotan dos conjuntos cualesquiera, simplificar:

$$\{(A \cup B) \cap [(B \setminus A) \cup (A \cap B)]\} \cap [A \cup (A \cup B)^c]$$

23. Si $A \subset B$ y $A \cap C = \emptyset$, simplificar:

$$[(A \cap C^c) \setminus B] \cup [B \cup (A \setminus C)]$$

24. Sean A y B dos conjuntos en un universo, tales que se verifica:

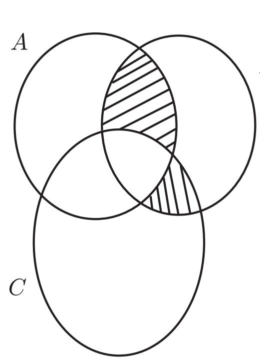
$$(A \setminus B) \cup (B \setminus A) = A \cup B$$

    Determinar, cuales de los siguientes enunciados es falso:

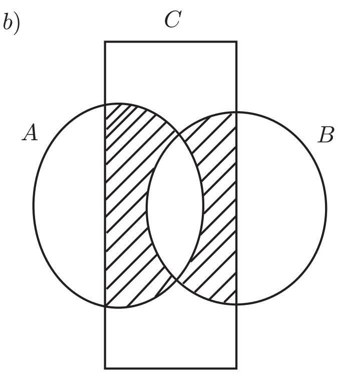
$$a) \quad A \cap B = B \quad b) \quad A^c \cap B = A^c \quad c) \quad A \cap B = \emptyset \quad d) \quad A \subset B^c$$

25. Determinar la expresión que representa la parte sombreada en cada uno de los siguientes diagramas:

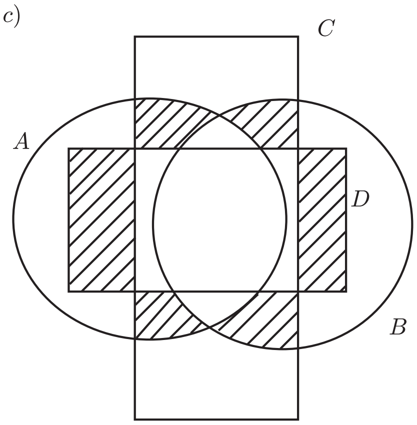
$a)$



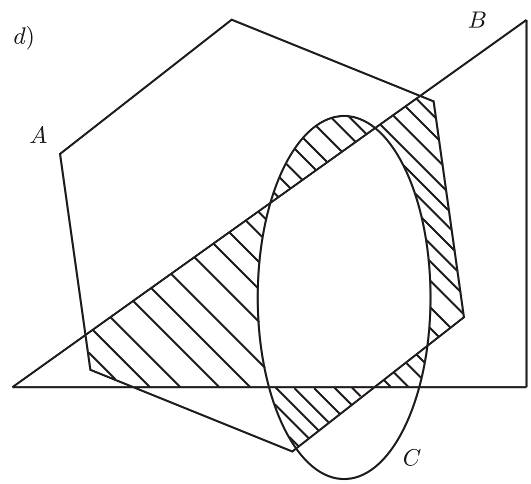
$b)$



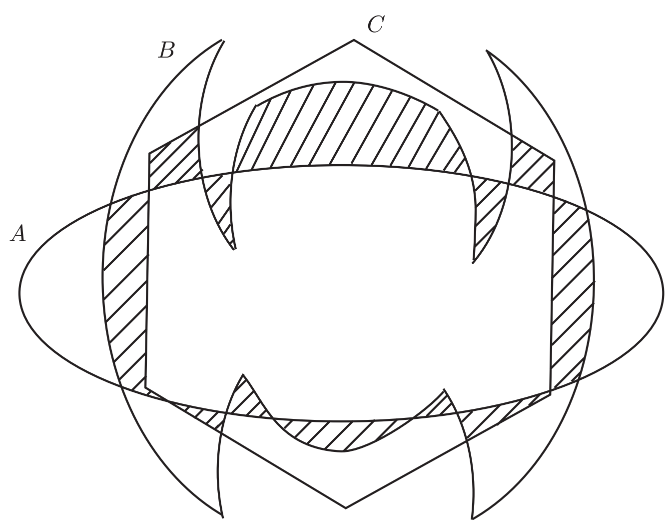
$c)$



$d)$



$e)$



26. Dados los conjuntos: $A = \{1, 2, 3, 4\}; B = \{2, 4, 5\}; C = \{3, 5, 7\}$. Señale que operación deberá efectuarse para que el resultado sea el conjunto $\{3, 5\}$

27. Si $A = \{a, b, c, d, e\}, B = \{b, c, e\}$ y $C = \{a, e\}$, entonces ¿Cuál es el conjunto $(A \cap$

$B) \setminus C$?

28. Sean los conjuntos:

$$A = \{x \in \mathbb{Z} / x = 3n - 1, n \in \mathbb{N}, n < 14\} B = \{x \in \mathbb{Z} / x = (\frac{5n}{2}), n \in \mathbb{N}, n \leq 13\}$$

Hallar $A \setminus B$

29. Sean los conjuntos:

$$U = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\} \quad A = \{x \in U / 2^x \in U\} \quad B = \{x \in U / 2 \leq x < 7\}$$
$$C = \{x \in U / \sqrt{x} \in U\}$$

Hallar: $\eta(B \setminus A)$, $\eta(A \bigtriangleup B)$, $\eta(B^c \bigtriangleup C^c)$ y $\eta([A \cup C] \cap B)$

30. Sabiendo que: $A \subset C$, $B \subset C$, $\eta(C) = 100$, $\eta(A \cup B) = 70$, $\eta(A \cap B) = 20$ y $\eta(B) - \eta(A) = 2$

Hallar:

a) $\eta([C \setminus A] \cap B)$

b) $\eta[(C \setminus B) \cap A]$

31. Se tiene 3 conjuntos A, B y C, que cumplen las siguientes condiciones:

a) $\eta(A \cap B) = 3$

b) $\eta(A \cap C) = 3$

c) $\eta(B \cap C) = 4$

d) $\eta(A) = 8$

e) $\eta(B) = 12$

f) $\eta(C) = 10$

g) $\eta(A \cap B \cap C) = 1$

Determinar la cardinalidad de $A \cup B \cup C$; $A \cup B$; $B \cup C$

32. Sean los conjuntos A y B, tales que $A \vartriangle B$ tiene 10 elementos y $A \cup B$ tiene 25 elementos. ¿Cuántos elementos tiene $A \cap B$?

33. Dados los conjuntos A y B, tales que $A \cup B$ tiene 18 elementos y $A \cap B$ tiene 7 elementos. ¿Cuántos elementos tiene $A \vartriangle B$?

34. De 33 personas que viajaron a Europa, 15 visitaron Francia, 16 visitaron Inglaterra, 16 visitaron Suiza, 5 visitaron Francia y Suiza, 5 visitaron Inglaterra y Suiza, y 2 los tres países.

    a) ¿Cuántos visitaron únicamente Francia?

    b) ¿Cuántos visitaron Inglaterra o Suiza pero no Francia?

    c) ¿Cuántos visitaron Francia y Suiza pero no Inglaterra?

35. Un hotel recibe 60 visitantes, de los cuales 37 permanecen a lo menos 1 semana, 43 gastan a lo menos \$ 30.000 diarios, 32 están completamente satisfechos del servicio; 30 permanecieron a lo menos una semana y gastaron a lo menos \$ 30.000 diarios, 26 permanecieron a lo menos una semana y quedaron completamente satisfechos, 27 gastaron a lo menos \$ 30.000 diarios y quedaron completamente satisfechos y 24 permanecieron a lo menos una semana, gastaron a lo menos \$ 30.000 diarios y quedaron completamente satisfechos.

    a) ¿Cuántos visitantes permanecieron a lo menos una semana, gastaron a lo menos \$ 30.000 diarios pero no quedaron completamente satisfechos?

    b) ¿Cuántos visitantes quedaron completamente satisfechos, pero permanecieron menos de una semana y gastaron menos de \$ 30.000 diarios?

    c) ¿Cuántos visitantes permanecieron menos de una semana y gastaron menos de \$ 30.000 diarios y no quedaron completamente satisfechos?

36. Una mesera tomó una orden de 57 hamburguesas: 22 con cebolla, 29 con mostaza y 25 con salsa de tomate. De estas, 10 tenían sólo cebolla y 15 sólo mostaza; 7 de las hamburguesas tenía sólo cebolla y mostaza y 3 los tres ingredientes. Realice un diagrama de Venn y determine:

    a) ¿Cuántas hamburguesas llevaban salsa y mostaza solamente?

    b) ¿Cuántos sólo llevaban salsa?

    c) ¿Cuántas hamburguesas llevaban cebolla o mostaza, pero no salsa?

37. Al investigar un grupo de 480 estudiantes sobre sus intereses de estudios superiores se obtuvo la siguiente información:

    Todos los que querían estudiar Ingeniería Civil, también querían estudiar Ingeniería Petrolera. Ninguno quería estudiar Ingeniería Civil y comercial. 10 alumnos preferían estudiar otras carreras. 60 querían estudiar Medicina e Ingeniería

Petrolera. 440 quieren estudiar Ingeniería Petrolera. 180 quieren estudiar Ingeniería Civil.

a) ¿Cuántos alumnos desean estudiar solamente Medicina?

b) ¿Qué porcentaje se interesa por estudiar 2 de las carreras mencionadas?

38. Se encuesta a 100 personas obteniéndose la siguiente información:

- Todo encuestado que es propietario de automóvil también lo es de casa.
- 54 encuestados son hombres.
- 30 de los encuestados que son hombres no son propietarios de automóviles.
- 30 de los encuestados que son mujeres son propietarios de casa.
- 5 de los encuestados que son mujeres son solamente propietarios de casa.
- 15 encuestados que son propietarios de casa no lo son de automóviles.

a) Hacer un diagrama adecuado a la situación e indicar la cardinalidad correspondiente a cada región.

b) ¿Cuántos encuestados que son hombres son solamente propietarios de casa?

c) ¿Cuántas mujeres no son propietarios de casa?

39. Un ingeniero que dirige la construcción de un edificio de tres plantas, distribuye el personal de la siguiente manera: 43 trabajan en la primera planta, 58 en la tercera planta, 16 en la primera y segunda planta, 22 en la primera y tercera planta, 7 trabajan en las tres plantas. Si 52 trabajan en una sola planta y 37 en las dos plantas a la vez pero no en las tres, Cuántos trabajan

a) en la primera y segunda, pero no en la tercera.

b) en la segunda o tercera pero no en la primera.

c) únicamente en la primera?

d) cuantos trabajan en total?

40. Para estudiar la calidad de un producto se consideran tres tipos de defectos A, B y C, como los más importantes. Se analizaron 120 productos con los siguientes resultados:

49 productos tienen el defecto A,
48 productos tienen el defecto B,

49 productos tienen el defecto C,
61 productos tienen exactamente un sólo tipo de defecto,
7 productos tienen los tres defecto, y el resto de los productos no presenta ningún tipo de defectos. Determinar:

a) ¿Cuántos productos tienen dos tipos de defectos?

b) ¿Cuántos productos no tienen defectos?

41. En una encuesta a 180 estudiantes se halló que: 62 se comportan bien, 125 son inteligentes, 144 son habladores, 106 son habladores e inteligentes, 22 estudiantes se comportan bien y no son inteligentes, 13 se comportan bien y no son habladores, 15 se comportan bien y son habladores, pero no son inteligentes.

    a) ¿Cuántos de los 180 estudiantes entrevistados no son inteligentes, no son habladores ni se comportan bien?

    b) ¿Cuántos estudiantes se comportan bien o son inteligentes, pero no habladores?

42. Una agencia de autos vendió durante un año 30 unidades con las siguientes características: 10 tenía transmisión automática, 20 tenía clima, 6 tenían transmisión automática y clima, 2 tenían transmisión automática pero no tenía ni clima ni auto estéreo, 3 tenía transmisión automática y clima pero no tenía auto estéreo, 3 no tenía ninguna de las tres características mencionadas, 11 tenía clima y auto estéreo. ¿Cuántas de estas unidades tenía auto estéreo?