UNIVERSIDAD CATÓLICA BOLIVIANA "SAN PABLO"
UNIDADES ACADÉMICAS CAMPESINAS
CARRERA DE AGROINDUSTRIA
BATALLAS

PRÁCTICA 5 - CÁLCULO I

(Límites y continuidad)

Docente: ***Lic. Bismar Choque Nina***

En los ejercicios 1 al 16, demuestre, aplicando la definición (Proposición) de límite, es decir, si:

$$\lim_{x\to a} f(x) = L$$
$$\Updownarrow$$
Para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que $0 < |x-a| < \delta$ implica $|f(x) - L| < \varepsilon$.

1. $$\lim_{x\to 2} 7 = 7$$
2. $$\lim_{x\to 5}(-4) = -4$$
3. $$\lim_{x\to 4}(2x+1) = 9$$
4. $$\lim_{x\to 1}(4x+3) = 7$$
5. $$\lim_{x\to 3}(7-3x) = -2$$
6. $$\lim_{x\to -4}(2x+7) = -1$$
7. $$\lim_{x\to -2}(1+3x) = -5$$
8. $$\lim_{x\to -2}(7-2x) = 11$$
9. $$\lim_{x\to -1}\left(\frac{x^2-1}{x+1}\right) = -2$$
10. $$\lim_{x\to 3}\frac{x^2-9}{x-3} = 6$$
11. $$\lim_{x\to 2} x^2 = 4$$
12. $$\lim_{x\to 3}(x^2+3x) = 18$$
13. $$\lim_{x\to 2}(3x^2-2x) = 8$$
14. $$\lim_{x\to 4}\frac{1}{x} = \frac{1}{4}$$
15. $$\lim_{x\to 3}\frac{1}{x^2} = \frac{1}{9}$$
16. $$\lim_{x\to 4}\sqrt{x} = 2$$

En los ejercicios 17 al 30, determine el límite

17. $$\lim_{x\to 5}(3x-7)$$
18. $$\lim_{x\to -4}(5x+2)$$
19. $$\lim_{x\to 2}(x^2+2x-1)$$
20. $$\lim_{x\to 3}(2x^2-4x+5)$$
21. $$\lim_{z\to -2}(z^3+8)$$
22. $$\lim_{y\to -1}(y^3-2y^2+3y-4)$$
23. $$\lim_{x\to 3}\frac{4x-5}{5x-1}$$
24. $$\lim_{x\to 2}\frac{3x+4}{8x-1}$$
25. $$\lim_{t\to 2}\frac{t^2-5}{2t^3+6}$$
26. $$\lim_{x\to -1}\frac{2x+1}{x^2-3x+4}$$
27. $$\lim_{x\to 2}\sqrt{\frac{x^2+3x+4}{x^3+1}}$$
28. $$\lim_{r\to 1}\sqrt{\frac{8r+1}{r+3}}$$

29.

$$\lim_{x\to 4} \sqrt[3]{\frac{x^2-3x+4}{2x^2-x-1}}$$

30.

$$\lim_{x\to -3} \sqrt[3]{\frac{5+2x}{5-x}}$$

En los ejercicios 31 al 41, dibuje la gráfica de la función dada, determine el límite indicado; si el límite no existe, diga por qué razón.

31. $f(x) = \begin{cases} 2 & \text{si } x < 1 \\ -1 & \text{si } x = 1 \\ -3 & \text{si } 1 < x. \end{cases}$

a) $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)$ *b*) $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)$ *c*) $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$

32. $f(x) = \begin{cases} -2 & \text{si } x < 0 \\ 2 & \text{si } 0 \leq x. \end{cases}$

a) $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$ *b*) $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)$ *c*) $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$

33. $g(s) = \begin{cases} s+3 & \text{si } x \leq 2 \\ 3-s & \text{si } -2 < s. \end{cases}$

a) $\lim\limits_{x\to -2^+} g(s)$ *b*) $\lim\limits_{x\to -2^-} g(s)$ *c*) $\lim\limits_{x\to -2} g(s)$

34. $h(x) = \begin{cases} 2x+1 & \text{si } x < 3 \\ 10-x & \text{si } 3 \leq x. \end{cases}$

a) $\lim\limits_{x\to 3^+} h(x)$ *b*) $\lim\limits_{x\to 3^-} h(x)$ *c*) $\lim\limits_{x\to 3} h(x)$

35. $g(t) = \begin{cases} 3+t^2 & \text{si } t < -2 \\ 0 & \text{si } t = -2 \\ 11-t^2 & \text{si } -2 < t. \end{cases}$

a) $\lim\limits_{x\to -2^+} g(t)$ *b*) $\lim\limits_{x\to -2^-} g(t)$ *c*) $\lim\limits_{x\to -2} g(t)$

36. $f(x) = \begin{cases} 2x+3 & \text{si } x < 1 \\ 4 & \text{si } x = 1 \\ x^2+2 & \text{si } 1 < x. \end{cases}$

a) $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)$ *b*) $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)$ *c*) $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$

37. $f(x) = 3 + |2x-4|$

a) $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)$ *b*) $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)$ *c*) $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$

38. $h(x) = \begin{cases} |x-1| & \text{si } x < -1 \\ 0 & \text{si } x = -1 \\ |1-x| & \text{si } -1 < x. \end{cases}$

a) $\lim\limits_{x\to 1^+} h(x)$ *b*) $\lim\limits_{x\to 1^-} h(x)$ *c*) $\lim\limits_{x\to 1} h(x)$

39. $f(x) = \begin{cases} x+1 & \text{si } x < -1 \\ x^2 & \text{si } -1 \leq x \leq 1 \\ 2-x & \text{si } 1 < x. \end{cases}$

a) Haga para $x \to -1$ (halle primero los límites laterales)

b) Haga cuando $x \to 1$ (halle primero los límites laterales)

40. $g(t) = \begin{cases} \sqrt[3]{t+1} & \text{si } t \leq -1 \\ \sqrt{1-t^2} & \text{si } -1 < t < 1 \\ \sqrt[3]{t-1} & \text{si } 1 \leq t. \end{cases}$

a) Halle el límite cuando $t \to -1$ (primero halle los límites laterales)

b) Halle el límite cuando $t \to 1$ (primero halle los límites laterales)

41. Dada $f(x) = \begin{cases} 2x - a & \text{si } x < -3 \\ ax + 2b & \text{si } -3 \leq x \leq 3 \\ b - 5x & \text{si } 3 < x. \end{cases}$ Determine los valores de a y b tales que límite de $f(x)$ exista, cuando $x \to -3$ y $x \to 3$

Límites de funciones algebraicos.

1. Cuando se tiene el límite de un cociente de polinomios, si $x \to a$ (donde a es un número real) de $P(x)/Q(x)$ y $P(a) = Q(a) = 0$, existe una indeterminación $0/0$ es recomendable hacer la siguiente transformación:

$$\lim_{x\to a} \frac{P(x)}{Q(x)} \implies \lim_{x\to a} \frac{(x-a)P_1(x)}{(x-a)Q_1(x)}$$

Esto se efectúa factorizando (por Ruffini o cualquier otro método) luego

$$\lim_{x\to a} \frac{P(x)}{Q(x)} = \lim_{x\to a} \frac{(x-a)P_1(x)}{(x-a)Q_1(x)} = \lim_{x\to a} \frac{P_1(x)}{Q_1(x)}$$

Si la indeterminación $\frac{0}{0}$ continua, se procede una vez más de la misma manera.

2. Método para hallar el límite del cociente de dos funciones cuando $x \to +\infty$ (Con indeterminación $\frac{\infty}{\infty}$), se divide numerador y denominador por x^n, siendo n la mayor potencia de x.

3. Método para hallar el límite de una expresión irracional indeterminada (expresiones con raíces). Se multiplica y se divide la expresión por el conjugado del numerador o del denominador, o de ambos según el caso. O la otra opción es haciendo un cambio de variable (teniendo en cuenta que la tendencia del límite también cambia)

Calcular los siguientes límites algebraicos.

42.
$$\lim_{x\to 2} \frac{x^2+1}{x^2-1}$$

43.
$$\lim_{x\to 1} \frac{x^2-2x+1}{x^3-x}$$

44.
$$\lim_{x\to 1} \frac{(x-1)\sqrt{2-x}}{1-x^2}$$

45.
$$\lim_{x\to 1} \left(\frac{1}{1-x} - \frac{3}{1-x^3}\right)$$

46.
$$\lim_{x\to 1} \left[\frac{x+2}{x^2-5x+4} + \frac{x-4}{3(x^2-3x+2)}\right]$$

47.
$$\lim_{x\to \infty} \left(\frac{x^3}{x^2+1} - x\right)$$

48.
$$\lim_{x\to \infty} \frac{\sqrt{x^2+1} - 3\sqrt{x}}{\sqrt[4]{x^3+5x} - x}$$

49.
$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x^2} - 1}{x}$$

50.
$$\lim_{x\to 5} \frac{\sqrt{x-1} - 2}{x-5}$$

51.
$$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt[3]{7+x^3}-\sqrt{3+x^2}}{x-1}$$

52.
$$\lim_{x\to\infty}(\sqrt{(x+m)(x+n)}-x)$$

53.
$$\lim_{x\to 2}\left(\frac{1}{2-x}-\frac{3}{8-x^3}\right)$$

54.
$$\lim_{x\to\frac{1}{2}}\frac{8x^2-1}{6x^2-5x+1}$$

55.
$$\lim_{x\to\infty}\frac{3x^4-2x+1}{5x^2+6x-2}$$

56.
$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x^2+4}-2}{\sqrt{x^2+9}-3}$$

57.
$$\lim_{x\to 4}\frac{\sqrt{1+2x}-3}{x-4}$$

58.
$$\lim_{x\to\infty}\frac{3^x+x}{3^x-2x}$$

59.
$$\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt[3]{x^2}+1}{x-2}$$

60.
$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2+1}{\sqrt[3]{x^7+2x}}$$

61.
$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x^2+a^2}-a}{\sqrt{x^2+b^2}-b}$$

62.
$$\lim_{x\to 1}\frac{1-\sqrt[3]{x}}{1-\sqrt{x}}$$

Límites de funciones Trigonométricos.

Para resolver límites de funciones trigonométricos indeterminados sólo se conoce el límite

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$$

Por lo que hay que hacer todas las transformaciones necesarias para poder aplicar esta fórmula (Para esta sección de límites es recomendable hacer un previo repaso de identidades trigonométricas). Esta formula se puede generalizar.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin\maltese}{\maltese}=1 \quad \text{si } \maltese\to 0$$

Calcular los siguientes límites trigonométricos.

63.
$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(8x)}{x}$$

64.
$$\lim_{x\to 0}\frac{2\sin(3x)}{3x}$$

65.
$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(3x)}{\sin(2x)}$$

66.
$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan(2x)}{\sin(5x)}$$

67.
$$\lim_{x\to 0}\frac{2x}{\sin(9x)}$$

68.
$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin(3x)}{2x}+\frac{1}{2}\right)$$

69.
$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos(2x)-\cos(5x)}{x^2}$$

70.
$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+\sin x}-\sqrt{1-\tan x}}{\sin(2x)}$$

71.
$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\sin x}-\frac{1}{\tan x}\right)$$

72.

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}(\frac{\pi}{2}-x)\tan x$$

73.

$$\lim_{x\to a}\frac{\cos x-\cos a}{x-a}$$

74.

$$\lim_{h\to 0}\frac{\sin(x+h)-\sin x}{h}$$

75.

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\sin x-\cos x}{1-\tan x}$$

76.

$$\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin(2x)}{x+\sin(3x)}$$

77.

$$\lim_{x\to\pi}\frac{1-\sin(\frac{x}{2})}{\pi-x}$$

78.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\arcsin x}{x}$$

79.

$$\lim_{\alpha\to\beta}\frac{\sin^2\alpha-\sin^2\beta}{\alpha^2-\beta^2}$$

80.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\arctan(2x)}{\sin(3x)}$$

Límites de funciones exponenciales y logarítmicas.

1. Para resolver límites de la forma: $\lim_{x\to a}[f(x)]^{g(x)}=c$, se representan tres casos:

a) Si existe el $\lim_{x\to a}f(x)=A$ y el $\lim_{x\to a}g(x)=B$, entonces $c=A^B$

b) Si $\lim_{x\to a}f(x)=A\neq 1$ y $\lim_{x\to a}g(x)=\pm\infty$ el problema se resuelve directamente.

$(A^{\pm\infty}=c)$

c) Si el $\lim_{x\to a}f(x)=1$ y $\lim_{x\to a}g(x)=\pm\infty$, da la indeterminación 1^∞.

Para salvar la indeterminación se utilizan los siguientes límites característicos:

$\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$ o $\lim_{x\to 0}(1+f(x))^{\frac{1}{f(x)}}=e$ si $f(x)\to 0$ cuando $x\to 0$; $\lim_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^x=e$

2. Si el $\lim_{x\to a}[\ln f(x)]=\ln[\lim_{x\to a}f(x)]$

Para salvar indeterminaciones su utilizan los siguientes límites característicos:

$\lim_{x\to\infty}\frac{\ln x}{x}=0$, $\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1$ o $\lim_{x\to 0}\frac{e^{f(x)-1}}{f(x)}=1$ si $f(x)\to 0$ cuando $x\to 0$

$$\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}=\ln a$$

Calcular los siguientes límites exponenciales y logarítmicas siguientes.

81.

$$\lim_{x\to 0}(1+2x)^{\frac{1}{x}}$$

82.

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{3x}-1}{x}$$

83.

$$\lim_{x\to 0}(1-2x)^{\frac{1}{x}}$$

84.

$$\lim_{x\to 0}(1+3x)^{\frac{2}{x}}$$

85.

$$\lim_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^{4x}$$

86.

$$\lim_{x\to\infty}(1+\frac{1}{2x})^{5x+3}$$

87.

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{\tan x}-1}{\tan x}$$

88.

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{2x}-1}{\sin(3x)}$$

89.

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{3x}-e^{x}}{\arctan x}$$

90.

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{5x}-e^{2x}}{\arctan(3x)-\arctan(2x)}$$

91.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\arcsin x-\arctan x}{x^3}$$

92.

$$\lim_{x\to +\infty}\frac{2^x-2^{-x}}{2^x+2^{-x}}$$

93.

$$\lim_{x\to -\infty}\frac{2^x-2^{-x}}{2^x+2^{-x}}$$

94.

$$\lim_{x\to 0}(\cos x+\sin x)^{\frac{1}{x}}$$

95.

$$\lim_{x\to\sqrt{2}}\frac{e^{2x^2+x-1}-e^{x^2+x+1}}{x^2-2}$$

96.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1-x)+\sin(3x)}{x}$$

97.

$$\lim_{x\to 0}\frac{b^x-a^x}{x}$$

98.

$$\lim_{x\to 0}\frac{8^x-e^x}{x}$$

CONTINUIDAD

En los siguientes 7 ejercicios, dibuje la gráfica de la función. Observe donde la gráfica se rompe, determine el número en el que la función es discontinua, y muestre por qué la definición de continuidad no satisface en este número.

99. $f(x)=\frac{x^2-3x-4}{x-4}$

100. $g(x)=\begin{cases}\frac{x^2-3x-4}{x-4} & \text{si } x\neq 4\\ 2 & \text{si } x=2.\end{cases}$

101. $h(x)=\frac{1}{x+2}$

102. $g(x)=\begin{cases}\frac{1}{x+2} & \text{si } x\neq -2\\ 0 & \text{si } x=-2.\end{cases}$

103. $f(x)=\begin{cases}x-1 & \text{si } x<1\\ 1 & \text{si } x=1\\ 1-x & \text{si } 1<x.\end{cases}$

104. $h(x)=\begin{cases}6+x & \text{si } x\leq -2\\ 2-x & \text{si } -2<x\leq 2\\ 2x-1 & \text{si } 2<x.\end{cases}$

105. $g(x)=\begin{cases}\frac{|x|}{x} & \text{si } x\neq 0\\ 1 & \text{si } x=0.\end{cases}$

En los siguientes 7 ejercicios, la función es discontinua en el número a;

a) Trace la gráfica de f en un rectángulo de inspección conveniente y determine que la gráfica se rompe en el punto donde $x=a$. ¿Parece ser removible o esencial esta discontinuidad? Si parece removible, especule sobre cómo debe redefinirse $f(a)$ de modo que la discontinuidad sea eliminada.

b) Confirme analíticamente la respuesta del inciso (a)

106. $f(x)=\frac{x^2+4x+3}{x+3}; a=-3$

107. $f(x)=\frac{x-5}{\sqrt{x-1}-2}; a=5$

108. $f(x)=\frac{\sqrt{x+5}-\sqrt{5}}{x}; a=0$

109. $f(x)=\frac{2-\sqrt{x+1}}{x-3}; a=3$

110. $f(x)=\frac{\sqrt[3]{x+1}-1}{x}; a=0$

111. $f(x)=\frac{x+5}{|x+1|-4}; a=-5$

112. $f(x)=\frac{x+5}{|x+1|-4}; a=3$

En los siguientes 6 ejercicios, determine los números en los que la función es continua e indique la razón.

113. $f(x) = (x-5)^3(x^2+4)^5$

114. $h(x) = \frac{x+1}{2x+5}$

115. $g(x) = \frac{x-2}{x^2+2x-8}$

116. $f(x) = \begin{cases} (x+2)^2 & \text{si } x \leq 0 \\ x^2+2 & \text{si } 0 < x. \end{cases}$

117. $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & \text{si } x < 3 \\ \frac{2}{9-x} & \text{si } 3 \leq x. \end{cases}$

118. $g(x) = \begin{cases} 2x - \sqrt[3]{x} & \text{si } x \leq 1 \\ x\sqrt{x} & \text{si } 1 < x. \end{cases}$

En los ejercicios 119 al 122, realice lo siguiente:

a) Determine los valores de las constantes c y k que hagan a la función continua en todo su dominio.

b) Dibuje la gráfica de la función resultante.

119. $f(x) = \begin{cases} 3x+7 & \text{si } x \leq 4 \\ kx-1 & \text{si } 4 < x. \end{cases}$

120. $f(x) = \begin{cases} kx-1 & \text{si } x \leq 2 \\ kx^2 & \text{si } 2 < x. \end{cases}$

121. $f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \leq 1 \\ cx+k & \text{si } 1 < x < 4 \\ -2x & \text{si } 4 \leq x. \end{cases}$

122. $f(x) = \begin{cases} x+2c & \text{si } x < -2 \\ 3cx+k & \text{si } -2 \leq x \leq 1 \\ 3x-2k & \text{si } 1 < x. \end{cases}$